

Pi in het oude India

In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.

Hij begon met 4. Dat is groter dan π . Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het

resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π . Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$

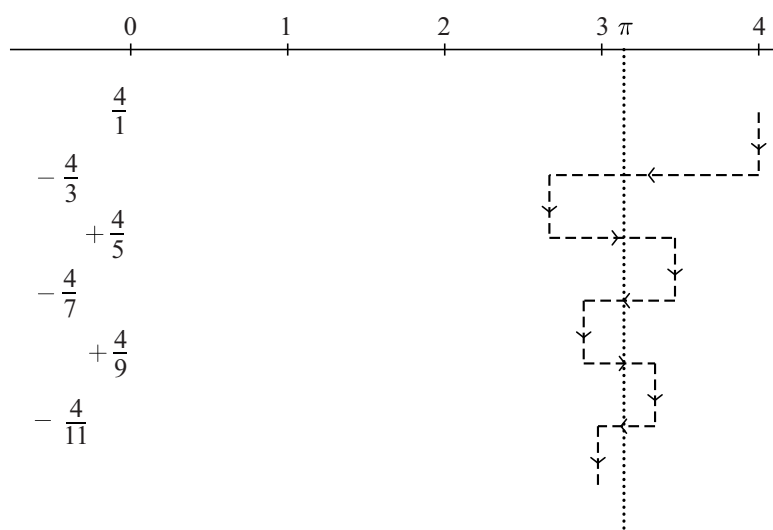
op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π .

Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichterbij het getal π . Zie de figuur.

figuur



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichterbij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π . Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π .

- 3p 18 Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \dots$

De directe formule voor deze rij is van de vorm:

$$u_n = \frac{a \cdot (-1)^{n-1}}{b \cdot (n-1) + 1} \text{ met } n = 1, 2, 3, \dots$$

- 3p 19 Bepaal de waarden van a en b in deze directe formule.

Madhava gaf ook een andere benaderingsaanpak. Hierbij leidde de somrij sneller tot een goede benadering van π dan bij zijn eerste methode. Ook bij die andere aanpak werd er beurtelings iets afgetrokken en iets opgeteld.

Die andere aanpak van Madhava zag er als volgt uit:

$$S_1 = \sqrt{12} \cdot 1$$

$$S_2 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right)$$

$$S_3 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2}\right)$$

$$S_4 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right)$$

$$S_5 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}\right)$$

enzovoort.

- 5p **20** Stel de recursieve formule op voor de somrij S_n met $n = 2, 3, 4, \dots$ en $S_1 = \sqrt{12}$ van de andere benaderingsaanpak van Madhava.